

1	2	3	4	Σ
4	35	6	4	17,5/18

Stochastik - Übung 6 (Abgabe: 24.11.09)

1) Bed. für Unabhängigkeit von A, B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Wegen GV und $\# \Omega = 101$

$$\frac{\#(A \cap B)}{101} = \frac{\#A}{101} \cdot \frac{\#B}{101}$$

$$\Leftrightarrow \#(A \cap B) = \frac{\#A \cdot \#B}{101} \quad \checkmark$$

Es ist $\#(A \cap B) \in \{0, \dots, 101\}$ (ebenso $\#A, \#B$). Da 101 Primzahl ist und deshalb nicht weiter zerlegt werden kann, muss $\#A$ oder $\#B$ ein ganzzahliges Vielfaches davon sein, damit überhaupt eine ganze Zahl insgesamt heraus kommt. $\checkmark$

In der Menge $\{0, \dots, 101\}$ sind die einzigen Möglichkeiten

0 und 101. Es gilt aber (OE):

$$\#A = 0 \Rightarrow A = \emptyset$$

$$\#A = 101 \Rightarrow A = \Omega$$

Das war gerade die Behauptung. $\checkmark$

2) (Schreibe k statt k_0)

Poissonverteilung zu $\lambda \geq 0$: $P(\{k\}) = f(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

als Funktion von λ auffassen und Extrema berechnen

1. Fall: $k=0 \Rightarrow f(\lambda) = e^{-\lambda}$

monoton fallend, wg. $\lambda \geq 0$ ist

$$\lambda = 0 = k \quad (\text{globales Maximum})$$

wie betrachten aber $\lambda \in]0, \infty[$
-0,5

2. Fall: Ableitungen

$$f'(\lambda) = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda} - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)$$

$$f''(\lambda) = \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} - 2 \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} \left(1 - 2 \frac{\lambda}{k-1} + \frac{\lambda^2}{k(k-1)}\right)$$



Fall 2a: $k=1 \Rightarrow f'(\lambda) = e^{-\lambda}(1-\lambda)$

$$f''(\lambda) = -e^{-\lambda}(1-\lambda) + e^{-\lambda} \cdot (-1) = e^{-\lambda}(\lambda-2) \quad \checkmark$$

$$f'(\lambda) = 0$$

$$0 = 1 - \lambda$$

$$\underline{\lambda = 1 = k}$$

$$f''(1) = \underbrace{e^{-1}}_{>0} \cdot \underbrace{(1-2)}_{<0} < 0 \Rightarrow \text{lok. Max.} \quad \checkmark$$

Fall 2b: $k \neq 1, (k \neq 0)$

$$f'(\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^{k-1} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0} \quad \lambda > 0$$

$$\text{oder } 1 - \frac{\lambda}{k} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_2 = k} \quad \checkmark$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow \text{keine Aussage } (k \neq 2)$$

$$k=2: f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{lok. Min.}$$

$$f''(k) = \underbrace{\frac{k^{k-2}}{(k-2)!}}_{>0} e^{-k} \underbrace{\left(1 - 2 \frac{k}{k-1} + \frac{k-k}{k(k-1)}\right)}_{\substack{1 - \frac{k}{k-1} \\ > 1 \\ < 0}} < 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow \text{lok. Max.}$

Um sicherzugehen, dass $\lambda=0$ für $k>2$ nicht doch ~~ein~~ Maximum ist, genügt wegen Stetigkeit einsetzen in f :

$$0 = f(0) < f(k) = \frac{k^k}{k!} e^{-k}$$

Also ist für $k \in \mathbb{N}_p$ der ML-Schätzer für λ gerade k .

für $k=0$ ex. kein ML-Schätzer

-0,5

3,5/4

unnötig

3a) Genau ein Element:

F_i bezeichne die Menge der Permutationen, die das i -te Element fest lassen, sonst aber keins.

⇒ Betrachte die Permutationen, wobei das i -te Element ^{fest bleibt} ignoriert wird ($\sigma(i) = i$)

511)

⇒ ~~$(n-1)$ -elementige~~ Permutationen, von

$A = \{1, \dots, n-1\}$, bei denen kein Element fest sein soll.

Aus den Rechnungen auf Seite 65 wissen wir, wie viele ^{Permutationen} Mengen es gibt, die mindestens ein Element fest lassen ⇒ $(n-1)! - |U E_i|$

ist die Anzahl der Mengen Permutationen in F_i

alle Permutationen von A

Permutationen die mindestens ein Element fest lassen

$$\Rightarrow |F_i| = (n-1)! - n(n-2)! + \binom{n}{2}(n-3)!$$

$$\Rightarrow |F_i| = (n-1)! - (n-1)(n-2)! + \binom{n-1}{2}(n-3)! - \binom{n-1}{3}(n-4)! \pm \dots \pm \binom{n-1}{n-1} 0!$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (n-1-k)! \cdot (-1)^k$$

Da $\Rightarrow P = \frac{|F_i|}{n!}$ immer nur ein Element

fest bleiben darf ⇒ $\forall i \neq j : F_i \cap F_j = \emptyset$

(denn es können nicht sowohl i als auch j fest bleiben)

$$\Rightarrow |F| = |F_1| + |F_2| + \dots + |F_n| = n \cdot |F_i|$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (n-1-k)! \cdot (-1)^k$$

$$\Rightarrow P = \frac{|F|}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n-1-k)!}{(n-1-k)! \cdot k! \cdot n!} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3b

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

(Potenzreihe)
der exp-Funktion

geht
 $\Rightarrow$ Für $h \rightarrow \infty$ ~~geht~~ $\sum_{k=0}^{h-1} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = \dots$

$\Rightarrow$ Für $h \rightarrow \infty$

geht $P_h = \sum_{k=0}^{h-1} \frac{(-1)^k}{k!}$

$= \sum_{k=0}^{h-1} (-1)^{k+1} = -1$

geg. $P_h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k = e^{-1} = \frac{1}{e} \checkmark$

3c

$P(\text{Mindestens 2 Elemente fest})$

$= 1 - P(\text{genau 1 fest oder keins fest})$

~~$= 1 - P(\text{genau 1 fest})$~~

┌
"genau 1 fest" und "keins fest" sind disjunkt,
denn eine Permutation kann nicht
beides erfüllen.
└

~~$= 1 - (P(\text{genau 1 fest}) + P(\text{keins fest}))$~~

$= 1 - P(\text{genau 1 fest}) = 1 + P(\text{mindestens 1 fest})$

$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

Einsetzen
der bekannten
Wahrscheinlichkeiten

$= 1 - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{k!} \right) - \frac{(-1)^n}{n!}$

$\xrightarrow{h \rightarrow \infty} 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - 2e^{-1} \checkmark$

3d) r Elemente fest: $F_{\vec{r}} =$ Menge der Permutationen, die $i_1, \dots, i_r$ festlassen, die übrigen aber vertauschen.

$\Rightarrow$ Wie in 3a: $|F_{\vec{r}}| = (n-r)! - (n-r)(n-r-1)! + \dots + (-1)^k \binom{n-r}{k} (n-r-k)! + \dots + (-1)^{n-r} \binom{n-r}{n-r} 0!$
(nur mit r weglassen)

$$= \sum_{k=0}^{n-r} \binom{n-r}{k} (n-r-k)! (-1)^k$$

$\Rightarrow$ Es gibt $\binom{n}{r}$ verschiedene $\vec{r}$ (mit r Festhaltepunkten ohne Beachtung der Reihenfolge aus den n Möglichen wählen)

$\Rightarrow \frac{|F(r)|}{n!} = \frac{\binom{n}{r} \cdot |F_{\vec{r}}|}{n!} = \sum_{k=0}^{n-r} \frac{\binom{n}{r} (n-r-k)! (-1)^k}{n!}$

Menge der Permutationen die genau r festhalten

$$= \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(n-r)! (n-r-k)! n!}{(n-r-k)! k! n! (n-r-k)! k!} \cdot (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k! r!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r!} e^{-1} = \frac{1}{r!} e$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} \frac{(-1)^k}{k!}$$

2+4/6

4) Unabh.: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P([a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

Dichte

geg.: Dichte $f(x) = 2x$

$$P\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]\right) = \int_{1/4}^{3/4} 2x dx = \left[x^2\right]_{1/4}^{3/4} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$P([0, 1]) = 1 \quad \checkmark$$

Stets: $\Delta := \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \cap [0, 1]$

Fall 1: $A \leq \frac{1}{4}$

F. 1*: $A = \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta = \{\frac{1}{4}\} \Rightarrow P(\Delta) = 0$

$$\Delta = \emptyset \Rightarrow P(\Delta) = 0$$
$$0 = \frac{1}{2} \cdot A^2$$

$$\Delta = \begin{cases} \emptyset, & t < \frac{1}{4} \\ \{\frac{1}{4}\}, & t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad \checkmark$$

Fall 2: $\frac{1}{4} < A < \frac{3}{4}$

$$\Delta = \left[\frac{1}{4}, A\right] \Rightarrow P(\Delta) = A^2 - \frac{1}{16} \quad \checkmark$$

$$A^2 - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot A^2$$

$$\frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{16}$$

$$A = \pm \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{2} \quad (\text{weil } A \in [0, 1]) \quad \checkmark$$

Fall 3: $A \geq \frac{3}{4}$

$$\Delta = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \Rightarrow P(\Delta) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot A^2$$

$$A = \pm 1$$

$$A = 1 \quad (t \in [0, 1]) \quad \checkmark$$

4/4